Министерство образования и науки Российской Федерации
Новосибирский государственный технический университет

Кафедра: высшей математики

Контрольная работа
по дисциплине: Финансовая математика

Выполнил:	Проверил:
Студент группы ОТЗ-001	Джафаров К.А.
_________________ Ганжа К.И.	
«____» ___________ 2005 г.	«____» ___________ 2005 г.
специальность: 060100	
шифр: 316 601 27	оценка ______________________

Новосибирск

2005

Содержание

Задача 1.

Предприятие получило кредит на один год в размере 10 млн. руб. с условием вернуть 16 млн. руб. Рассчитайте процентную и учётную ставки.

Решение.

Дано

$S(t_0) = 10$ *млн. руб.* – начальная сумма

$S(t_0 + T) = 16$ *млн. руб.* – сумма возврата

Найти

$i, d - ?$ – процентная, учётная ставки

____

Процентная ставка – это отношение процента к начальной сумме [1, с. 7]:

$$i(t_0, T) = \frac{S(t_0 + T) - S(t_0)}{S(t_0)} \qquad (1.1)$$

где $S(t_0)$ – величина выданной ссуды

$S(t_0 + T)$ – величина погашения ссуды.

Подставляя в (1), получим процентную ставку:

$$i(t_0, T) = \frac{S(t_0 + T) - S(t_0)}{S(t_0)} = \frac{16 - 10}{10} = 0{,}60 = 60\ \%$$

Годовой учётной ставкой называют отношение процентного дохода за год к наращённой сумме [1, с. 9]:

$$d = \frac{S(1) - S(0)}{S(1)}, \qquad \text{где } S(1) = S(0) \cdot (1 + i) \qquad (1.2)$$

Подставим данные в (2) и получим:

$$d = \frac{16 - 10}{16} = 0{,}375 = 37{,}5\ \%$$

Годовая учётная ставка связана с годовой процентной ставкой [1, с. 9]:

$$d = \frac{1}{1+i} \quad (1.3)$$

Тогда:

$$d = \frac{1}{1+0,6} = 0,375 = 37,5\ \%$$

Ответ

Годовая процентная ставка $i = 60\ \%$

Годовая учётная ставка $d = 37,5\ \%$

Задача 2.

На счёте в банке 1,2 млн. руб. Банк платит 12,5 % годовых. Предлагается войти всем капиталом в совместное предприятие (СП), при этом прогнозируется удвоение капитала через 5 лет. Принимать ли это предложение?

Решение.

Дано

$S(0) = 1,2$ *млн. руб* – начальная сумма

$S_{СП}(5) = 2,4$ *млн. руб* – конечная сумма при вхождении в СП

$i_{банк} = 12,5\ \%$ – ставка банковского процента

$n = 5$ *лет* – срок вклада

Найти

Сравнить $S_{СП}(5)$ и $S_{банк}(5)$

____

Чтобы определить какое из двух предложений более выгодно, необходимо рассчитать сумму, которую можно будет получить через 5 лет в обоих случаях.

Так как сложные проценты дают больший прирост наращенной суммы, чем простые проценты, то предположим, что банк платит по сложным процентам. Сделаем ещё одно предположение, что проценты выплачиваются раз в год в конце года. При *сложных процентах* наращенная сумма в банке за 5 лет составит [1, с.10]:

$$S(n) = S(0) \cdot (1+i)^n \tag{2.1}$$

$$S(5)_{банк} = 1{,}2 \cdot (1+0{,}125)^5 = 1{,}2 \cdot 1{,}802 = 2{,}162 \text{ } \textit{млн. руб.}$$

При вхождении со своим капиталом в совместное предприятие за 5 лет прогнозируется удвоение капитала, т.е.:

$$S(5)_{СП} = S(0) \cdot 2 = 1{,}2 \cdot 2 = 2{,}4 \text{ } \textit{млн. руб.}$$

$$S(5)_{СП} > S(5)_{банк}$$

Таким образом видно, что выгоднее войти всем своим капиталом в совместное предприятие.

Можно решить задачу обратным способом: какой должен быть сложный банковский процент, чтобы через 5 лет произошло удвоение суммы вклада? Преобразуем формулу (2.1) и получим:

$$i = \sqrt[n]{\frac{S(n)}{S(0)}} - 1 = \sqrt[5]{\frac{2 \cdot 1{,}2}{1{,}2}} - 1 = 0{,}149 = 14{,}9 \text{ } \%$$

<u>Ответ</u>

1) При данных условиях вхождение в совместное предприятие более выгодно, т.к. $S(5)_{СП} > S(5)_{банк}$

2) Чтобы заинтересовать вкладчика банк должен предложить годовую процентную ставку по сложным процентам не менее 14,9 %.

Задача 3.

Пусть современная стоимость \$1000, которые мистер А должен получить по банковскому депозиту через 2 года при постоянной интенсивности δ, равна удвоенной современной стоимости \$600, которые мистер В получит по депозиту через 4 года при том же δ. Найти δ.

Решение.

Дано

$S_A(2) = \$1000$ – сумма, которую получит мистер А через 2 года

$S_B(4) = \$600$ – сумма, которую получит мистер В через 4 года

$S_A(0) = 2 \cdot S_B(0)$

Найти

$\delta - ?$ – сила роста (интенсивность наращения)

Через два года мистер ***А*** должен получить \$1000 при интенсивности роста δ [1, с. 15]:

$$S_A(2) = S_A(0) \cdot e^{\delta \cdot 2} \tag{5.1}$$

Через четыре года мистер ***В*** должен получить \$600 при такой же интенсивности роста δ:

$$S_B(4) = S_B(0) \cdot e^{\delta \cdot 4} \tag{5.2}$$

При этом $S_A(0) = 2 \cdot S_B(0)$. Подставим числовые значения в (5.1) и (5.2) и выразим из них, например, $S_B(0)$:

$$1000 = 2 \cdot S_B(0) \cdot e^{\delta \cdot 2} \Rightarrow S_B(0) = \frac{1000}{2 \cdot e^{\delta \cdot 2}} \tag{5.3}$$

$$600 = S_B(0) \cdot e^{\delta \cdot 4} \Rightarrow S_B(0) = \frac{600}{e^{\delta \cdot 4}} \tag{5.4}$$

Приравняем уравнения (5.3) и (5.4) и выразим из полученного равенства δ:

$$\frac{1000}{2} \cdot e^{-\delta \cdot 2} = 600 \cdot e^{-\delta \cdot 4}$$

$$e^{-\delta \cdot 2} \cdot e^{\delta \cdot 4} = \frac{600}{500}$$

$$e^{\delta \cdot 2} = 1{,}2$$

$$\delta = \frac{1}{2} \ln 1{,}2 = 0{,}091 = 9{,}1\ \%$$

__Ответ__

Сила роста $\delta = 9{,}1\ \%$

Задача 4.

Вклад в сумме 2 млн. руб. помещён на банковский депозит с ежемесячным начислением сложных процентов по ставке 6 % в месяц. Требуется найти реальный ожидаемый доход вкладчика за год, если в печати опубликованы прогнозы трёх организаций о месячном темпе инфляции, согласно которым $h_{мес}^{(н)}$ = 0,03; 0,05 и 0,01 соответственно. Вероятности этих прогнозов: p_1 = 0,3; p_2 = 0,5; p_3 = 0,2. Решить эту задачу т.о.: определите среднее значение $\widehat{H}_{год}$ по всем трём прогнозам, а затем с его помощью вычислить ожидаемый реальный доход вкладчика.

Решение.

<u>*Дано*</u>

$S(0) = 2$ *млн. руб.*		– первоначальная сумма вклада
$i = 6\,\%$		– ставка банковского процента
$h_{мес}^{(н)} = 0{,}03$	$p_1 = 0{,}3$	– прогноз темпа инфляции и его вероятность
$h_{мес}^{(н)} = 0{,}05$	$p_1 = 0{,}5$	– прогноз темпа инфляции и его вероятность
$h_{мес}^{(н)} = 0{,}01$	$p_1 = 0{,}2$	– прогноз темпа инфляции и его вероятность

<u>*Найти*</u>

$S(1) - ?$ – ожидаемый доход вкладчика

____

Рассчитаем годовой индекс инфляции для трёх вариантов прогноза [1, с. 19]:

$$H_{год\,1} = (1 + h_{мес\,1})^{12} = (1 + 0{,}03)^{12} = 1{,}426$$

$$H_{год\,2} = (1 + h_{мес\,2})^{12} = (1 + 0{,}05)^{12} = 1{,}796$$

$$H_{год\,3} = (1 + h_{мес\,3})^{12} = (1 + 0{,}01)^{12} = 1{,}127$$

Таким образом ожидаемый среднегодовой индекс инфляции с учётом вероятностей прогнозов равен:

$$\widehat{H}_{год} = p_1 \cdot H_{год\,1} + p_2 \cdot H_{год\,2} + p_3 \cdot H_{год\,3} = 0{,}3 \cdot 1{,}426 + 0{,}5 \cdot 1{,}796 + 0{,}1 \cdot 1{,}127 = 1{,}439$$

Реальный коэффициент наращения за год составит:

$$\widehat{A}_{год} = \frac{A_{год}}{\widehat{H}_{год}} = \frac{(1+0{,}06)^{12}}{1{,}439} = \frac{2{,}012}{1{,}439} = 1{,}398$$

Следовательно доход за год составит:

$$S(1) = S(0) \cdot (\widehat{A}_{год} - 1) = 2 \cdot 10^6 \cdot (1{,}398 - 1) = 796{,}659 \text{ } \textit{тыс. руб}$$

<u>*Ответ*</u>

Реальный прогнозируемый доход на вклад 2 млн. руб. под начисление 6 % ежемесячно составит 796,659 тыс. руб. при ожидаемом годовом темпе инфляции 43,9 % за год.

Задача 5.

Сбыт продукции будет увеличиваться в течение 2-х лет – каждый квартал на 25 млн. руб. Определить наращенную сумму к концу срока при условии, что поступление денег – постнумерандо.

Решение.

Дано

$a = 25 \cdot 10^6$ *руб* – прирост сбыта продукции

$n = 8$ – количество сроков (два года по четыре квартала)

Найти

$S_1(n)$ – наращенная сумма к концу срока (постнумерандо)

В данном примере имеет место рента с постоянным абсолютным изменением членов во времени [1, с. 38], т.е. изменения происходят согласно арифметической прогрессии. Таким образом выплачивается ежеквартальная рента постнумерандо, размеры членов ренты образуют последовательность:

$$Y,\ Y+a,\ Y+2a,\ ...,\ Y+(n-1)a \qquad (5.1)$$

Величина $t-го$ члена равна $Y+(t-1)a$

Чтобы определить наращенную сумму необходимо просуммировать все члены:

$$S_1(n) = \sum_{t=1}^{n}\left[Y+(t-1)a\right] = \sum_{t=1}^{8}\left[0+(t-1)\cdot 25\right] = 700 \text{ млн. руб.}$$

Ответ

Наращенная сумма к концу срока составит 700 млн. руб.

Задача 6.

Долг в сумме 10 000 руб. необходимо погасить последовательными равными суммами за 5 лет платежами постнумерандо. За заём выплачиваются проценты по ставке 5 % годовых. Составьте план амортизации займа.

Решение.

Дано

$K = 10\ 000\ руб.$ – сумма долга

$i = 5\ \%$ – процент за заем

$n = 5$ – срок займа

Найти

Y_1

____

Первый способ

Для взносов постнумерандо Y_1 находится из уравнения $Y_1 \cdot a_{5\,i} = S_1(0)$ [1, с. 33]:

$$Y_1 = \frac{S_1(0)}{a_{5\,i}} = \frac{10\ 000}{4{,}3295} = 2\ 309{,}74\ руб,$$

где $a_{5\,5} = 4{,}3295$, наёдено из таблицы значений $a_{n\,i}$ [1, с. 151]

Второй способ

Амортизация займа равными аннуитетами при декурсивном методе расчёта означает, что заем погашается в конце каждого расчётного периода постоянной величиной, т.е. сумма долга и процентов по нему постоянна в течение всего периода выплаты [1, с. 71].

Первая выплата определяется по формуле [1, с. 72]:

$$b_1 = \frac{K \cdot i}{(1+i)^n - 1} \tag{6.1}$$

Последующие выплаты определяются по формуле:

$$b_k = b_1(1+i)^{k-1} = a(1+i)^{-n+k-1}, \qquad (6.2)$$

а процентный платёж:

$$I_k = a\left[1-(1+i)^{-n+k-1}\right] \qquad (6.3)$$

Остаток долга определяется по формуле:

$$R_{n-k} = \frac{K\cdot\left[(1+i)^n-(1+i)^k\right]}{(1+i)^n-1} \qquad (6.4)$$

Подставляя в формулы (6.2)…(6.4) значения k=1, 2, 3, 4, 5, составим план амортизации займа. Для удобства расчётов заполним таблицу[1].

Таблица

На конец года	Долг и остаток долга	Процентный платёж	Выплата	Аннуитет
0	10 000			
1	8 190,252	500	1 809,748	2 309,748
2	6 290,017	409,513	1 900,235	2 309,748
3	4 294,769	314, 501	1 995,247	2 309,748
4	2 199,760	214,738	2 095,010	2 309,748
5	0	109,988	2 199,760	2 309,748

Данные таблицы полностью согласуются с расчётом по первому способу.

<u>*Ответ*</u>

Погашение долга в 10 000 руб. под 5 % годовых на 5 лет должно осуществляться последовательными платежами в конце каждого года (постнумерандо) суммами 2 309,74 руб.

[1] Расчёты по формулам (6.2)…(6.4) производились в MathCAD 2001 Professional

Задача 7.

Продавцом в уплату за товар $P = 10\,000$ руб. выписано четыре векселя с погашением по полугодиям. Ставка процентов за кредит – 10 % годовых (простых). Определить процентные платежи и суммы векселей двумя способами.

Решение.

Дано

$n = 4$ – количество векселей

$i = 5\ \%$ – ставка простых процентов за период, под который производится кредитование

$P = 10\,000$ – цена товара

Найти

V_t – сумма векселя в момент t

____

1 способ.

Ставка процента за кредит – проценты на остаток задолженности. Выплаты по векселям производятся равными суммами, в каждый вексель записана сумма $\frac{P}{n}$. Проценты за кредит образуют ряд [1, с. 77–78]:

$$P \cdot i,\ P \cdot i \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right), \ldots, P \cdot i \cdot \left(1 - \frac{t-1}{n}\right), \ldots, \frac{P}{n} \cdot i \qquad (t = 1, 2, \ldots, n) \tag{7.1}$$

Сумма векселя в момент времени t составит при погашении:

$$V_t = \frac{P}{n} + P \cdot i \cdot \left(1 - \frac{t-1}{n}\right) = \frac{P}{n}\left[1 + (n - t + 1) \cdot i\right]. \tag{7.2}$$

Общая сумма начисленных процентов:

$$P \cdot i \cdot \sum_{t=1}^{n} \left(1 - \frac{t-1}{n}\right) = \frac{n+1}{2} \cdot P \cdot i \tag{7.3}$$

Сумма всех векселей составит:

$$\sum_{t=1}^{n} V_t = P \cdot \left(1 + \frac{n+1}{2} \cdot i\right) \tag{7.4}$$

<u>*2 способ.*</u>

Ставка процента за кредит – проценты на сумму долга, включенную в вексель. Сумма векселя в момент t

$$V_t = \frac{P}{n}(1 + t \cdot i), \qquad t = 1, 2, \ldots \tag{7.5}$$

Сумма процентов за весь срок:

$$\sum_{t=1}^{n} V_t - P = \sum_{t=1}^{n} \frac{P}{n} \cdot (1 + t \cdot i) - P = \frac{n+1}{2} \cdot P \cdot i \tag{7.6}$$

Расчёты по двум способам оплаты сведём в таблицу[2]

t	$\frac{P}{n}$	*1 способ*		*2 способ*	
		$Pi\left(1 - \frac{t-1}{n}\right)$	V_i	$\frac{P}{n}ti$	V_i
1	2 500	500	3 000	125	2 625
2	2 500	375	2 875	250	2 750
3	2 500	250	2 750	375	2 875
4	2 500	125	2 625	500	3 000
Итого	10 000	1 250	11 250	1 250	11 250

Как видно из таблицы при способе 1 платежи уменьшаются, а при способе 2 – увеличиваются. Однако итоговые суммы при этом одинаковые.

[2] Расчёты производились в MathCAD 2001 Professional

Литература

1. Джафаров К.А., Шмаков А.В. Финансовая математика: Курс лекций. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. – 160 с.